D01 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$\boldsymbol{z \times \bar{z} + 2z = 40 + 10i}$$

Corrigé

Posons $z = x + iy$ avec x et y réels, on a alors $\bar{z} = x - iy$.

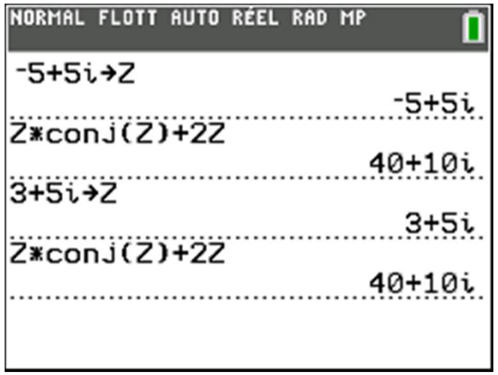
L'équation devient :

$$(x + iy)(x - iy) + 2(x + iy) = 40 + 10i$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x + 2iy = 40 + 10i$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x = 40 \\ 2y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x = 40 \\ y = 5 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x^2 + 5^2 + 2x - 40 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x^2 + 2x - 15 = 0 \end{cases}$$

On a les équivalences :

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 - 16 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x + 1 + 4)(x + 1 - 4) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x + 5)(x - 3) = 0$$
$$\Leftrightarrow x + 5 = 0 \text{ ou } x - 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = -5 \text{ ou } x = 3$$

L'équation de départ admet pour solutions : $-5 + 5i$ et $3 + 5i$.



D02 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z : $\boldsymbol{z^2 = 7 - 24i}$.

Corrigé

Posons $z = x + iy$, x et y réels, on a alors :

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

Donc l'équation $z^2 = 7 - 24i$ devient :

$$x^2 - y^2 + 2ixy = 7 - 24i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 7 \\ 2xy = -24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 7 \\ xy = -12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 7 \\ y = \dfrac{-12}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \left(-\dfrac{12}{x}\right)^2 = 7 \\ y = \dfrac{-12}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \dfrac{144}{x^2} = 7 \\ y = \dfrac{-12}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^4}{x^2} - \dfrac{144}{x^2} = 7 \\ y = \dfrac{-12}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 144 = 7x^2 \\ y = \dfrac{-12}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 7x^2 - 144 = 0 \\ y = \dfrac{-12}{x} \end{cases}$$

On a l'équivalence :

$$x^4 - 7x^2 - 144 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 7x^2 - 144 = 0$$

En posant $X = x^2$, on obtient : $X^2 - 7X - 144 = 0$.

Or, $X^2 - 7X - 144$ est de la forme $aX^2 + bX + c$ avec $a = 1$, $b = -7$ et $c = -144$, de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(1)(-144) = 49 + 576 = 625 = 25^2$$

$X^2 - 7X - 144$ admet deux racines réelles distinctes :

$$X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+7 - 25}{2(1)} = -9$$
$$X_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+7 + 25}{2(1)} = \frac{32}{2} = 16$$

- si $X = -9$, alors $x^2 = -9$ impossible ($x \in \mathbb{R}$)
- si $X = 16$, alors $x^2 = 16 \Leftrightarrow x = -4$ ou $x = 4$

si $x = -4$, alors : $y = -\frac{12}{x} = -\frac{12}{-4} = 3$

si $x = 4$, alors : $y = -\frac{12}{x} = -\frac{12}{4} = -3$

Conclusion : l'équation $z^2 = 7 - 24i$ admet deux solutions : $\boldsymbol{-4 + 3i}$ et $\boldsymbol{4 - 3i}$.

Méthode 2 (n'aboutit pas toujours !)
En supposons x et y entiers (ce qui n'est pas certain), on a : $x| -12$.
Les diviseurs positifs de (-12) sont 1,2, 3, 4, 6 et 12.
• si $x = 1, y = -12, x^2 - y^2 = 1^2 - (-12)^2 = 1 - 144 \neq 7$
• si $x = 2, y = -6, x^2 - y^2 = 2^2 - (-6)^2 = 4 - 36 \neq 7$
• si $x = 3, y = -4, x^2 - y^2 = 3^2 - (-4)^2 = 9 - 16 \neq 7$
• si $x = 4, y = -3, x^2 - y^2 = 4^2 - (-3)^2 = 16 - 9 = 7$ donc convient.
On a donc : $7 - 24i = (4 - 3i)^2$ et l'équation $z^2 = 7 - 24i$ s'écrit :

$$z^2 = (4-3i)^2 \Leftrightarrow z^2 - (4-3i)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow [z - (4-3i)][z + (4-3i)] = 0$$
$$\Leftrightarrow z - (4-3i) = 0 \text{ ou } z + (4-3i) = 0$$
$$\Leftrightarrow z = 4 - 3i \text{ ou } z = -4 + 3i$$

L'équation de départ admet pour solutions : $\mathbf{4 - 3i}$ **et** $\mathbf{-4 + 3i}$.

Vérification
$(4-3i)^2 = 4^2 - 2(4)(3i) + (3i)^2 = 16 - 24i - 9 = 7 - 24i$ ✔
$(-4+3i)^2 = \left(-(4-3i)\right)^2 = +(4-3i)^2 = 7 - 24i$ ✔

D03 $\forall z \in \mathbb{C}, \boldsymbol{P(z) = z^3 + z^2 - 4z + 6}$

1. **Démontrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$:**
   « si α est une racine de P alors $\bar{\alpha}$ est une racine de P ».
2. **Vérifier que $1 + i$ est une racine de P.**
   En déduire une deuxième racine de P.
3. **Donner une factorisation de $P(z)$ puis toutes les racines de P.**

Corrigé
$\forall z \in \mathbb{C}, \boldsymbol{P(z) = z^3 + z^2 - 4z + 6}$

1. **Démontrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ on a : si α est une racine de P alors $\bar{\alpha}$ est aussi une racine de P.**
   Soit α une racine de P.
   Par définition d'une racine d'un polynôme, on $P(\alpha) = 0$, autrement dit $\alpha^3 + \alpha^2 - 4\alpha + 6 = 0$.
   On a :
   $$P(\bar{\alpha}) = (\bar{\alpha})^3 + (\bar{\alpha})^2 - 4(\bar{\alpha}) + 6 = \overline{\alpha^3} + \overline{\alpha^2} - \bar{4} \times \bar{\alpha} + \bar{6}$$
   $$= \overline{\alpha^3} + \overline{\alpha^2} - \overline{4 \times \alpha} + \bar{6} = \overline{\alpha^3 + \alpha^2 - 4\alpha + 6} = \bar{0} = 0$$
   On a donc bien $\boldsymbol{P(\bar{\alpha}) = 0}$.

2. **Vérifier que $1 + i$ est une racine de P, en déduire une deuxième racine de P.**
   $$P(1+i) = (1+i)^3 + (1+i)^2 - 4(1+i) + 6$$
   $$= 1^3 + 3(1)^2 i + 3(1)i^2 + i^3 + 1 + 2i + i^2 - 4 - 4i + 6$$
   $$= 1 + 3i - 3 - i + 1 + 2i - 1 - 4 - 4i + 6$$
   $$= 1 - 3 + 1 - 1 - 4 + 6 + i(3 - 1 + 2 - 4)$$
   $$= 0 + i \times 0$$
   $$= 0$$
   On a : $P(1+i) = 0$ donc $\mathbf{1 + i}$ **est une racine de P**.

   Or, d'après **1.**, si α est une racine de P alors $\bar{\alpha}$ est aussi une racine de P donc $\overline{1+i}$ est une racine de P, autrement dit : $\mathbf{1 - i}$ **est une racine de P**.

3. **Donner une factorisation de $P(z)$, en déduire toutes les racines de P.**
   $1 + i$ et $1 - i$ sont deux racines distinctes de P qui est de degré 3 donc il existe un polynôme Q de degré 1 tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$:
   $$P(z) = (z - (1+i))(z - (1-i))Q(z)$$
   Comme le terme de plus haut degré de P est z^3 : $Q(z) = z + b$,
   donc : $z^3 + z^2 - 4z + 6 = (z - (1+i))(z - (1-i))(z + b)$.
   Or, on a :
   $$(z - (1+i))(z - (1-i))$$
   $$= z^2 - z(1-i) - z(1+i) + (1+i)(1-i)$$
   $$= z^2 - z[(1-i) + (1+i)] + 1^2 - i^2$$
   $$= z^2 - 2z + 2$$
   Donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$:
   $$(z - (1+i))(z - (1-i))(z + b)$$
   $$= (z^2 - 2z + 2)(z + b)$$

$$= z^3 + z^2(b-2) + z(-2b+2) + 2b$$

On a donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$z^3 + z^2 - 4z + 6 = z^3 + z^2(b-2) + z(-2b+2) + 2b$$

d'où par identification :

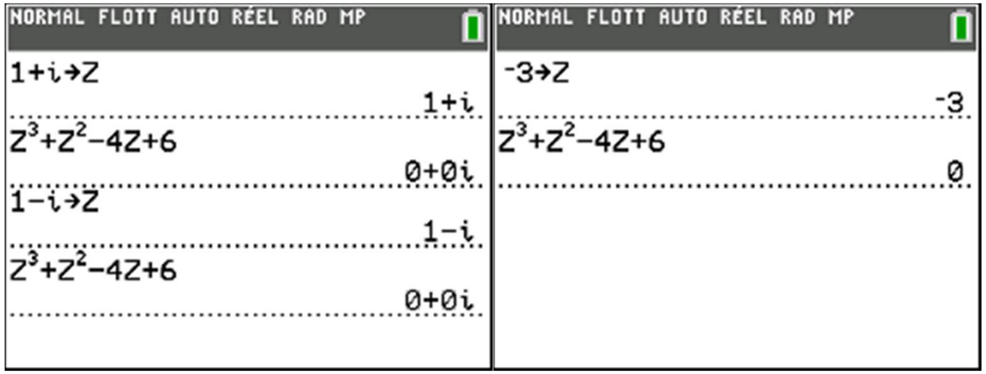
$$\begin{cases} b-2=1 \\ -2b+2=-4 \\ 2b=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3 \\ 2b=6 \\ b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3 \\ b=3 \\ b=3 \end{cases} \Leftrightarrow b=3$$

Conclusion : $\boldsymbol{\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z-(1+i))(z-(1-i))(z+3).}$

On a les équivalences :

$$P(z)=0 \Leftrightarrow \big(z-(1+i)\big)\big(z-(1-i)\big)(z+3)=0$$
$$\Leftrightarrow z-(1+i)=0 \; ou \; z-(1-i)=0 \; ou \; z+3=0$$
$$\Leftrightarrow z=1+i \; ou \; z=1-i \; ou \; z=-3$$

Les racines de P sont : $1+i$, $1-i$ et -3.



D04 $\forall \in \mathbb{C}, \boldsymbol{P(z) = z^3 + (-7+i)z^2 + (1-10i)z - 7 + 21i}$

1. **On sait que P admet une racine réelle x.**
   a. **Montrer que $P(x)$ a pour partie réelle $x^3 - 7x^2 + x - 7$ et pour partie imaginaire $x^2 - 10x + 21$.**
   b. **En déduire x.**
2. **Donner une factorisation de $P(z)$, $z \in \mathbb{C}$.**
3. **En déduire toutes les racines de P.**

Corrigé

$\boldsymbol{\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = z^3 + (-7+i)z^2 + (1-10i)z - 7 + 21i}$

1. **On sait que P admet une racine réelle x.**
   a. **Partie réelle et partie imaginaire de $P(x)$.**
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
   $$P(x) = x^3 + (-7+i)x^2 + (1-10i)x - 7 + 21i$$
   $$P(x) = x^3 - 7x^2 + ix^2 + x - 10ix - 7 + 21i$$
   $$P(x) = x^3 - 7x^2 + x - 7 + i(x^2 - 10x + 21)$$
   Or, $x \in \mathbb{R}$ donc $x^3 - 7x^2 + x - 7 \in \mathbb{R}$ et $x^2 - 10x + 21 \in \mathbb{R}$ donc $P(x)$ **a pour partie réelle $x^3 - 7x^2 + x - 7$ et pour partie imaginaire $x^2 - 10x + 21$.**

   b. **En déduire x.**
   On sait que $x \in \mathbb{R}$ est une racine de P donc $P(x) = 0$.
   Or, un complexe est nul si et seulement sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nuls, donc :
   $$\begin{cases} x^3 - 7x^2 + x - 7 = 0 \\ x^2 - 10x + 21 = 0 \end{cases}$$
   Or, on a les équivalences :
   $x^2 - 10x + 21 = 0 \Leftrightarrow (x)^2 - 2(x)(5) + (5)^2 - 25 + 21 = 0$
   $\Leftrightarrow (x-5)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-5)^2 - 2^2 = 0$
   $\Leftrightarrow (x-5+2)(x-5-2) = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-7) = 0$
   $\Leftrightarrow x - 3 = 0 \; ou \; x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \; ou \; x = 7$
   • si $x = 3$, $x^3 - 7x^2 + x - 7 = 3^3 - 7(3)^2 + 3 - 7 \neq 0$
   donc $x = 3$ est refusé.
   • si $x = 7$, $x^3 - 7x^2 + x - 7 = 7^3 - 7(7)^2 + 7 - 7 = 0$
   donc $x = 7$ est accepté.
   L'unique racine réelle de P est : 7.

2. **Donner une factorisation de $P(z)$, $z \in \mathbb{C}$.**
   $P(7) = 0$ donc d'après le théorème de factorisation $P(z)$ est factorisable par $z - 7$, puis en raisonnant sur le terme de plus haut degré de P, on en déduit qu'il existe $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$ tels que :
   $$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z-7)(z^2 + bz + c)$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}&(z-7)(z^2+bz+c)\\&=z^3+bz^2+cz-7z^2-7bz-7c\\&=z^3+z^2(b-7)+z(c-7b)-7c\end{aligned}$$

On a donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$z^3+(-7+i)z^2+(1-10i)z-7+21i$$
$$=z^3+z^2(b-7)+z(c-7b)-7c$$

d'où par identification :

$$\begin{cases}b-7=-7+i\\c-7b=1-10i\\-7c=-7+21i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=i\\c-7i=1-10i\\-c=-1+3i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=i\\c=1-10i+7i\\c=1-3i\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b=i\\c=1-3i\\c=1-3i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=i\\c=1-3i\end{cases}$$

On a donc : $\forall \boldsymbol{z} \in \mathbb{C}, \boldsymbol{P(z)=(z-7)(z^2+iz+1-3i)}$.

3. **Déterminer les autres racines de $\boldsymbol{P}$.**

Les racines de P sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de $P(z)=0$.

Or, cette équation s'écrit :

$$\begin{aligned}&(z-7)(z^2+iz+1-3i)=0\\&\Leftrightarrow z-7=0 \ ou\ z^2+iz+1-3i=0\\&\Leftrightarrow z=7\ ou\ z^2+iz+1-3i=0\end{aligned}$$

$z^2+iz+1-3i$ est de la forme az^2+bz+c avec $a=1$, $b=i$ et $c=1-3i$, de discriminant :

$\Delta=b^2-4ac=i^2-4(1)(1-3i)=-1-4+12i=-5+12i$
$=4+12i-9=2^2+2(2)(3i)+(3i)^2=(2+3i)^2$

En posant $\delta=2+3i$, on a donc $\delta^2=\Delta$.

D'après le cours, $z^2+iz+1-3i$ admet pour racines :

$$z_1=\frac{-b-\delta}{2a}=\frac{-i-(2+3i)}{2(1)}=\frac{-2-4i}{2}=-1-2i$$
$$z_2=\frac{-b+\delta}{2a}=\frac{-i+(2+3i)}{2(1)}=\frac{2+2i}{2}=1+i$$

<u>Conclusion</u>

Les racines de $\boldsymbol{P}$ sont : $\boldsymbol{7}$, $\boldsymbol{-1-2i}$ et $\boldsymbol{1+i}$.